காவிகள் [Vectors]

காவி வரைவிலக்கணம்

காவி என்பது பருமனும் திசையும் உடைய முக்கோணக் காவிக் கூட்டல் விதியைத் திருப்தி செய்கின்ற பௌதிகக் கணியமாகும்.

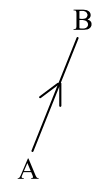
உதாரணம் :- விசை வேகம் உந்தம் திருப்புதிறன்

குறியீடு

அட்சரகணிதத்தில் காவிகளை தடித்த எழுத்துக்களாலும் அல்லது எழுத்துக்கு கீழே கோடிட்டும் (உ+ம் : $\underline{a}$) குறிக்கப்படும். கேத்திர கணிதத்தில் இவை திசையுடைய கோட்டுத் துண்டத்தினால் குறிக்கப்படும்.

உ+ம் :

$\vec{AB} = \underline{x}$ **(என் க)** **நீளம்**; $AB = |\underline{x}| = x$



பருமன்

காவி $\underline{a}$ யின் பருமனை a அல்லது $|\underline{a}|$ என அட்சரகணிதத்தில் எழுதுவோம். கேத்திர கணிதத்தில் $\vec{AB}$ என்னும் காவியின் பருமன் நீளம் AB யினால் தரப்படும்.

இரு காவிகள் சமனாவதற்கு வேண்டிய நிபந்தனை

$\underline{a}, \underline{b}$ **என்னும் இரு காவிகள் இருப்பின்**

(i) $|\underline{a}| = |\underline{b}|$ **ஆகவும்**

(ii) $\underline{a}$ **யின் திசையும்** $\underline{b}$ **யின் திசையும் ஒன்றாயிருந்தால் காவிகள்** $\underline{a}$ **உம்** $\underline{b}$ **யும் சமனெனக் கூறுவோம்.**

அதாவது $\underline{a} = \underline{b}$ **ஆகும்.**

கேத்திர கணிதத்தில் $\vec{PQ}, \vec{RS}$ **என்னும் காவிகளை எடுப்பின்**

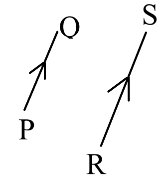
(i) **நீளம்** PQ = **நீளம்** RS **ஆகவும்**

(ii) PQ **வின் திசை (போக்கு)** = RS **இன் திசை (போக்கு) ஆகவும் இருப்பின்** $\vec{PQ}, \vec{RS}$ **ஆகும்.**

சமாந்தரமான காவிகள்

ஒரே திசையுடைய காவிகள் சமாந்தரமான காவிகள் எனப்படும்.

உ+ம் : காவிகள் $\vec{PQ}, \vec{RS}$ **சமாந்தரமானவை**



அலகுக்காவி

ஒரு காவியின் பருமன் 1 ஆயின் அதை அலகுக்காவி என அழைப்போம். அதன் திசை எவ்வாறாகவும் இருக்கலாம்.

$\underline{i}$ என்பது அலகுக் காவி எனின் அதன் பருமன் $|\underline{i}| = 1$

குறிப்பு :

$\underline{a}$ என்பது யாதுமொரு காவியாயின் $\underline{a}$ யின் திசையிலுள்ள அலகுக்காவி $= \dfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ ஆகும்.

சூனியக் காவி

தன்பருமன் பூச்சியமாயிருக்கும் காவி சூனியக்காவி எனப்படும். இது $\underline{0}$ இனால் குறிக்கப்படும்.

அதாவது $\underline{a}$ என்பது சூனியக்காவி எனின் $|\underline{a}| = 0$ ஆகும்.

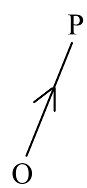
ஒருமைக்காவி

ஒரு நிலைத்த திசையும் பருமனும் கொண்ட காவி ஒருமைக்காவி எனப்படும்.

தானக் காவி [Position Vector]

O என்பது தரப்பட்ட ஒரு உற்பத்தி என்க. P என்பது வெளியில் யாதுமொரு புள்ளி என்க. எனின் $\overrightarrow{OP}$ என்பது O குறித்து P யின் தானக்காவி என அழைக்கப்படும்.

உ+ம் : $\overrightarrow{OP} = \underline{r}$



காவி ka

$\underline{a}$ என்பது தரப்பட்ட ஒரு காவியும் k என்பது ஒரு தரப்பட்ட நேர் எண்ணும் ஆயின் $\underline{b}$ என்னும் காவி

(i) $|\underline{b}| = k|\underline{a}|$ என்பதையும்

(ii) $\underline{b}$, $\underline{a}$ யினது திசைகள் ஒன்றானவை என்பதையும் திருப்தி செய்தால் $\underline{b} = k\underline{a}$ என கூறலாம்.

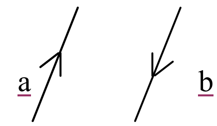
அதாவது $\underline{a}$ என்னும் ஒரு காவி தரப்பட்டிருந்தால் $k\underline{a}$ என்னும் காவியை பெறுவதற்கு $\underline{a}$ யின் திசைக்கு சமாந்தரமான கோட்டை எடுத்து அதில் $k|\underline{a}|$ நீளமான துண்டைக் குறித்தால் அது காவி $k\underline{a}$ ஐத் தரும்.

-a என்னும் காவி

$\underline{a}$ என்பது ஒரு தரப்பட்ட காவி என்க. $\underline{b}$ என்னும் காவி

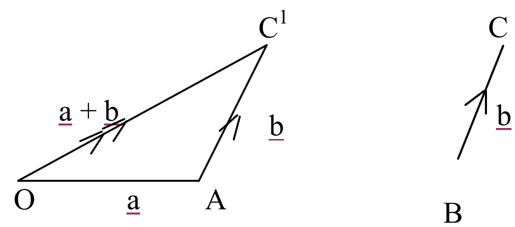
(i) பருமன் $|\underline{a}| = |\underline{b}|$ என்பதையும்

(ii) $\underline{b}$ யின் திசை, $\underline{a}$ யின் திசைக்கு எதிராக இருத்தலையும் திருப்தி செய்தால் காவி $\underline{b}$ $= -\underline{a}$ எனப்படும்.



காவிக் கூட்டல் விதி

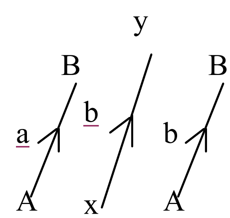
$\underline{a}$ என்னும் காவியுடன் $\underline{b}$ என்னும் காவியைக் கூட்டினால் அக்கூட்டுத்தொகை $\underline{a}+\underline{b}$ இனாலே குறிக்கப்படும். கேத்திரகணிதத்தில் $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$ என்க. $\underline{b} = \overrightarrow{BC}$ என்க. $\underline{b} = \overrightarrow{AC'}$ ஆகுமாறு A யிலிருந்து AC^1 என்னும் கோட்டுத் துண்டை வரைக.



காவிகளைக் கழித்தல்

$\underline{a} + (-\underline{b}) = \underline{a} - \underline{b}$ என கூறலாம்.

காவி $\lambda \underline{a}$(λ ஒரு எண்ணி)



இங்கு λ ஒரு எண்ணி. $\underline{a}$ ஒரு தரப்பட்ட காவி

வகை 1 $\lambda > 0$

(i) $|\underline{b}| = \lambda |\underline{a}|$ ஆயும்

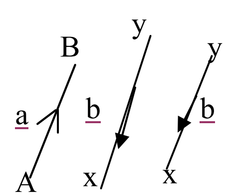
(ii) $\underline{b} // \underline{a}$ ஆயும்

(iii) $\underline{b}$ யின் போக்கு $\underline{a}$ யின் போக்குக்கு ஒத்தாயுமிருப்பின், $\underline{a} = \lambda \underline{a}$ என எழுதலாம்.

வகை 2

$\lambda < 0$

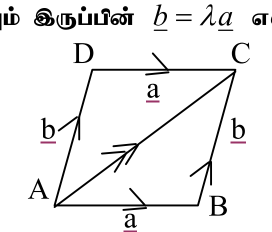
என்பது



(i) $|\underline{b}| = \lambda |\underline{a}|$ ஆயும்

(ii) $\underline{b} // \underline{a}$ ஆயும்

(iii) $\underline{b}$ யின் போக்கு a யின் போக்கிற்கு எதிராயும் இருப்பின் $\underline{b} = \lambda \underline{a}$ என இடலாம்.



வகை 3

$\lambda = 0$

$\lambda = 0$ ஆயின் $\lambda \underline{a} = \underline{0}$ ஆகும்

$\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$ **என நிறுவுதல்.**

$\overrightarrow{AB}=\underline{a}, \overrightarrow{BC}=b$ **என் க.**

/ காவிக் கூட்டல் விதிப்படி $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AC}=\underline{a}+\underline{b}$ **ஆகும். (1)**

இணைகரம் ABCD **ஐப் பூர்த்தி செய்க.** $AD=BC$ & $AD // BC$ **அத்துடன்** A **யிலிருந்து** D **யின் போக்கும்** B **இலிருந்து** C **இன் போக்கும் ஒன்று.**
எனவே

இவ்வாறே $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\underline{a}$ **ஆகும்.**

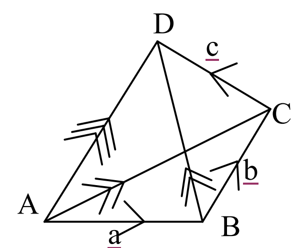
காவிக்கூட்டல் விதிப்படி $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ **ஆகும்.**

$\overrightarrow{AC}= \underline{b}+\underline{a}$ **(2)**

(1), (2) $\Rightarrow \underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$

உ+ம் : 1 $\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})=(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}$ **என நிறுவுதல்.**

$\overrightarrow{AB}=\underline{a}, \overrightarrow{BC}=\underline{b}, \overrightarrow{CD}=\underline{c}$ என் க.



காவிக்கூட்டல் விதிப்படி

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$
$=\underline{b}+\underline{c}$ **(1)**

காவிக்கூட்டல் விதிப்படி

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$
$=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$ — **(2)**

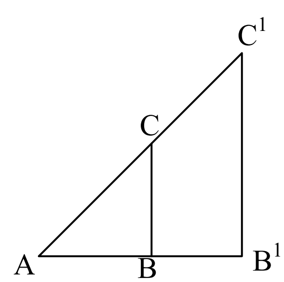
இனி $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AC}=\underline{a}+\underline{b}$ ———— (3)

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$
$=(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}$ ———— (4)

$(2),(4) \Rightarrow \underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})=(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}$ **ஆகும்.**

உ+ம் : 2 $\lambda(\underline{a}+\underline{b})=\lambda\underline{a}+\lambda\underline{b}$ **என நிறுவுதல்.**



$\overrightarrow{AB}=\underline{a}, \overrightarrow{BC}=\underline{b}$ **என் க**
காவிக்கூட்டல் விதிப்படி

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

$= \underline{a} + \underline{b}$ **(1)**

$\dfrac{AB}{AB^1} = \dfrac{1}{\lambda}$ **ஆகுமாறு** AB **ஐ** B^1 **வரை நீட்டுக.**

$\therefore \; AB^1 = \lambda AB$

$\Rightarrow \vec{AB^1} = \lambda \vec{AB} = \lambda \underline{a}$

$\dfrac{AC}{AC^1} = \dfrac{1}{\lambda}$ **ஆகுமாறு** AC **ஐ** C^1 **வரை நீட்டுக.**

$AC^1 = \lambda AC$

$\therefore \; \vec{AC}^1 = \lambda \vec{AC} = \lambda(\underline{a} + \underline{b})$ (1) **இலிருந்து** (2)

$\dfrac{AB}{AB^1} = \dfrac{AC}{AC^1} = \dfrac{1}{\lambda}$ **அமைப்பு**

$\therefore$ **வடிவொத்த முக்கோணிகளின் பண்பின்படி** $BC \,//\, B^1C^1, \lambda BC = B^1C^1$

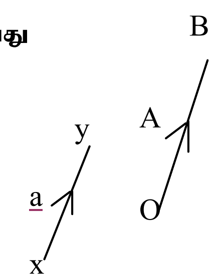
$\vec{B^1C^1} = \lambda \vec{BC}$

$= \lambda \underline{b}$

காவிக்கூட்டல் விதிப்படி $\vec{AC^1} = \vec{AB^1} + \vec{B^1C^1}$

$= \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$ **ஆனால்** $\vec{AC^1} = \lambda(\underline{a} + \underline{b})$ **நிறுவியது**

/ $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$



உ+ம் : 3 $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{a}$ **என நிறுவுதல்.**

λ, μ **என்பன எண்ணிகள் ஆகும்.**

$\vec{XY} = \underline{a}$ **என்க.**

$OA = \lambda XY$ **ஆகுமாறு** x y **இற்குச்** // **ஆக** OA **ஐ வரைக.**

(வ+ம்) படி $\vec{OA} = \lambda \vec{XY} = \lambda \underline{a}$

$AB = \mu XY$ **ஆகுமாறு** OA **ஐ** B **வரை நீட்டுக.**

(வ+ம்) படி $\overrightarrow{AB} = \mu \overrightarrow{XY} = \mu \underline{a}$

ஆனால் $\vec{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$= \lambda XY + \mu XY$

$= (\lambda + \mu) \times y$

(வ+ம்) படி $\vec{OB} = (\lambda + \mu)\vec{xy} = (\lambda + \mu)\underline{a}$ (1)

ஆனால் $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ **(காவிக்கூட்டல் விதி)**

$= \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$

$(1), (2) \Rightarrow (\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$

பயிற்சிகள்

1. $-\underline{a}$, $-\underline{b}$ என்பவற்றின் கூட்டுத்தொகை $-(\underline{a} + \underline{b})$ எனக் காட்டுக.
2. $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = (\underline{a} + \underline{d}) + (\underline{b} + \underline{c})$ எனக் காட்டுக.
3. λ மறை எண்ணியெனின் $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda a + \lambda \underline{b}$ எனக் காட்டுக.
4. $\lambda(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b} + \lambda \underline{c}$ எனக் காட்டுக.
5. ABCEDF ஒரு ஒழுங்கான அறுகோணி. ஏனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.
   i. $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{BC}$
   ii. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{AF} + \vec{FE} + \vec{ED} = 2\vec{AD}$
   iii. $\vec{AB} + \vec{AF} + \vec{CD} + \vec{ED} = \vec{AD}$
6. ஒரு இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசம கூறிடுகின்றன. என நிறுவுக.
7. முக்கோணம் ABC யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB யின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே D,E,F ஆகும்.
   i. $\vec{FE} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ எனக் காட்டுக.
   ii. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \underline{0}$ எனக் காட்டுக.
8. $\lambda(\mu \underline{a}) = \lambda \mu \underline{a} = \mu \lambda \underline{a} = \mu(\lambda \underline{a})$ என நிறுவுக. இங்கு எண்ணிகள் ஆகும்.

அத்தியாயம் - II

தானக் காவி

குறித்த ஒரு புள்ளி O தொடர்பாக வெளியில் யாதுமொரு புள்ளி P யின் நிலை $\vec{OP}$ என்ற காவியால் குறிக்கப்படும். இது O குறித்து P இன் தானக் காவி எனப்படும்.

செவ்வகத் தெக்காட்டுக்குரிய ஆள்கூறுகளால் காவிகளைக் குறித்தல்

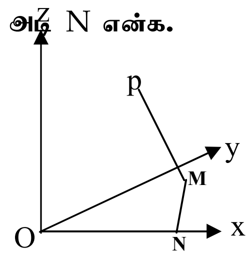
ஒரு திருகு செல்வதற்குரிய திசையை நோக்கி அதை வலஞ்சுழியாக திருப்பும் போது அது முன் முகமாகச் சென்றால் அதை ஒரு வலக்கைத் திருகு என அழைப்போம். இல்லாவிட்டால் அதை ஒரு இடக்கைத் திருகு என அழைப்போம்.

Ox, oy இரண்டையும் செங்குத்தாக வரைந்து இவை இரண்டிற்கும் செங்குத்தாக ஒரு வலக்கைத் திருகை O வில் வைத்து ox இலிருந்து oy க்கு செல்லும் போக்கிலே திருப்பும் போது அத்திருகு முன் முகமாகச் செல்லும் திசையை oz என எடுத்தால் oxyz என்னும் அச்சுத்தொகுதி ஒரு வலக்கை அச்சுத் தொகுதி எனப்படும். Oz ஐ மேற்கூறியதற்கு எதிர்த்திசையில் எடுத்தால் அது இடக்கை அச்சுத்தொகுதி எனப்படும்.

ஒரு தெக்காட்டுக்குரிய வலக்கை அச்சுத் தொகுதியை குறித்து ஒரு புள்ளிக்குரிய ஆள்கூறுகள்.

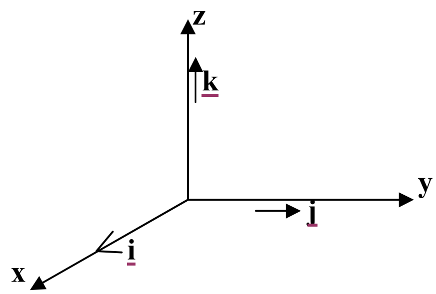
வெளியியே உள்ள ஒரு புள்ளி P என்க. Pயிலிருந்து தளம் oxy யிற்கு வரைந்த செங்குத்து PM என்க. M இலிருந்து ox இற்கு நீட்டப்பட்ட செங்குத்தின் அடி N என்க.

/ ON = x, NM = y, MP = z என்க.



ON, NM, MP ஆனவை ox, oy, oz இன் திசைகளில் அளக்கப்படுகின்றதைப் பொறுத்து குறிகளைக் கொண்டிருக்கும். அட்சரகணிதப்படி அளக்கும் நீளங்கள் எனில் (x,y,z) என்பது P யின் தொக்காட்டு ஆள்கூறுகள் எனப்படும்.

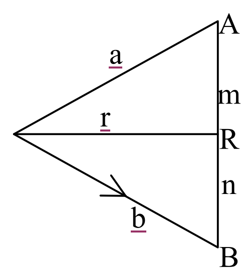
செங்கோண அலகுக் காவி



$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்பன முப்பரிமாண செங்கோண அச்சுத் தொகுதியில் x,y,z அச்சுக்களின் மேற்காட்டப்பட்ட திசையில் உள்ள அலகுக் காவிகள். இம்மூன்று காவிகளும் வலக்கை அச்சுத்தொகுதியில் அமைந்திருக்கும்.

இங்கு $|\underline{i}| = |\underline{j}| = |\underline{k}| = 1$

தரப்பட்ட இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியினைக் காணல்.



$\frac{AR}{RB} = \frac{m}{n}$ என் க

$n\,AR = mRB$

A, R, B என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளன. A யிலிருந்து R இன் போக்கு = R இலிருந்து B யின் போக்கு

$\therefore \quad n\,\overrightarrow{AR} = m\,\overrightarrow{RB}$

$n\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OR}\right) = m\left(\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OB}\right)$ காவிக் கூட்டல் விதிப்படி

$n(-\underline{a} + \underline{r}) = m(-\underline{r} + \underline{b})$

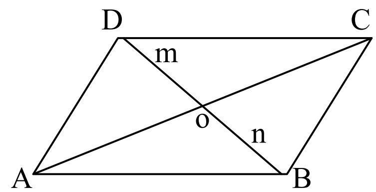
$-n\underline{a} + n\underline{r} = -m\underline{r} + m\underline{b}$

$\underline{r}(m+n) = n\underline{a} + m\underline{b}$

/ $\underline{r} = \dfrac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m+n}$

உ+ம் 1 : <u>இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசம கூறிடுகின்றன.</u>

முறை 1 : இணைகரத்தின் உச்சிகள் A,B,C,D **என்பவற்றின் தானக் காவிகள் முறையே** $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ **என்க.**



$AB \,//\, CD,\ AB = CD,\ A \to B,\ D \to C$

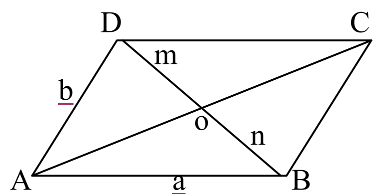
/ $\vec{AB} = \vec{DC}$

$\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

/ $\dfrac{\underline{b} + \underline{d}}{2} = \dfrac{\underline{c} + \underline{a}}{2}$

BD **ஐ** 1:1 **என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியும்** AC **ஐ** 1:1 **என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியும் ஒன்றாகும். அதாவது** AC **யும்** BD **ஒன்றையொன்று இருசம கூறிடுகின்றன.**

முறை 2 :



$\vec{AB} = \underline{a}, \vec{AD} = \underline{b}$ **என்க.**

$\dfrac{DO}{OB} = \dfrac{m}{n}$ **என்க.**

/ $\vec{AO} = \dfrac{m\underline{a} + n\underline{b}}{m+n}$

$m\underline{a} + n\underline{b} = (m+n)\vec{AO}$ (1)

A, O, C **என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் இருப்பதால்**

$(m+n)\vec{AO} = \lambda\,\vec{AC}$ **என்க.**

$= \lambda\left(\vec{AB} + \vec{BC}\right)$ **காவிக்கூட்டம் விதிப்படி**

$= \lambda(\underline{a} + \underline{b})$ (2) (/ $\vec{BC} = \underline{b}$)

(1), (2) $\Rightarrow m\underline{a} + n\underline{b} = \lambda(\underline{a} + \underline{b})$

$(m-\lambda)\underline{a} + (n-\lambda)\underline{b} = \underline{o}$

ஆனால் $\underline{a} \neq \underline{b}$ **ஆகும்.**

/ $m - \lambda = 0, n - \lambda = 0$

அதாவது $m = \lambda, n = \lambda$

$\frac{m}{n} = 1$

$(\lambda + \lambda)\overrightarrow{AO} = \lambda\,\overrightarrow{AC}$

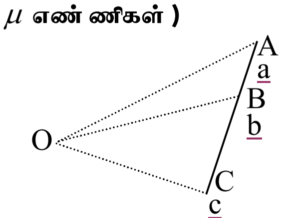
$\frac{AO}{AC} = \frac{1}{2}$

/ AC , DB என்னும் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசம கூறிடுகின்றன.

உ+ம் 2 : <u>மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டுப் புள்ளிகளாக இருப்பதற்குரிய நிபந்தனை</u>

A, B, C ஒரே கோட்டில் இருப்பதற்கு $\lambda\,\overrightarrow{AB} = \mu\,\overrightarrow{AC}$ (இங்கு λ, μ எண்ணிகள்)

A, B, C யின் தானக்காவிகள் $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ஆகும்.



/ $\lambda(\underline{b} - \underline{a}) = \mu(\underline{c} - \underline{a})$

$(\mu - \lambda)\underline{a} + \lambda\underline{b} + (-\mu)\underline{c} = \underline{0}$

அதாவது $\ell\underline{a} + m\underline{b} + n\underline{c} = \underline{0}$

இங்கு $\ell = \mu - \lambda,\ m = \lambda,\ n = -\mu$ ஆகும்

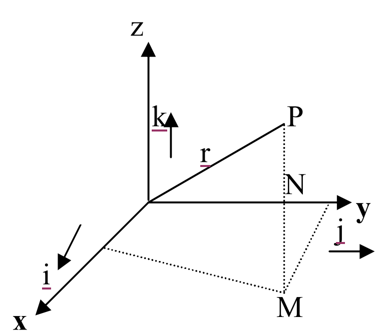
/ $\ell + m + n = 0$

/ மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டுப் புள்ளிகளாக இருப்பதற்கு

$\ell\underline{a} + m\underline{b} + n\underline{c} = \underline{0}$

$\ell + m + n = 0$ ஆகும்.

<u>காவி ஒன்றின் செங்கோண திசைகளில் துணிதல்</u>



ox, oy, oz என்பன வலக்கை அச்சுத் தொகுதியாகும்.

Ox, oy, oz வழியேயான அலகுக் காவிகள் $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்க.

$p \equiv (x, y, z)$ என்க.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$ காவிக் கூட்டல் விதி

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$ காவிக் கூட்டல் விதி

/ $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP}$

$ON = y \qquad NM = x \quad MP = z$

/ $\overrightarrow{ON} = y\underline{j}$ / $\overrightarrow{NM} = x\underline{i}$ / $\overrightarrow{MP} = z\underline{k}$

/ $\overrightarrow{OP} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

திசைக் கோசைன்கள்

OP யானது ox, oy, oz அச்சுக்களுடன் அமைக்கும் கோணற்கள் α, β, r ஆயின் $Cos\alpha, Cos\beta, Cosr$ என்பன $\overrightarrow{OP}$ யின் திசைக் கோசைன்கள் எனப்படும். இவற்றை முறையே ℓ, m, n என்பவற்றால் குறிக்கலாம்.

அதாவது $\ell = Cos\alpha,\ m = Cos\beta,\ n = Cos\, r$ ஆகும்.

OP = r என்க.

$\therefore\ x = r\, Cos\alpha,\ y = r\, Cos\beta,\ z = r\, Cos\, r$ இங்கு $P \equiv (x, y, z)$

பைதகரசின் தேற்றப்படி

$$OP^2 = OM^2 + MP^2$$
$$OM^2 = ON^2 + NM^2$$
$$\therefore OP^2 = ON^2 + ONM^2 + MP^2$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$= r^2Cos^2\alpha + r^2Cos^2\beta + r^2Cos^2 r$$
$$\therefore\ Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2 r = 1$$

அதாவது $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$

உ+ம் 1 : $\underline{F}_1 = 3\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k},\ \underline{F}_2 = 2\underline{i} - 4\underline{j} - 3\underline{k},\ \underline{F}_3 = -\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$

எனின் பின்வருவனவற்றின் பருமன் காண்க.

i. $\underline{F}_3$
ii. $\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3$
iii. $2\underline{F}_1 - 3\underline{F}_2 - 5\underline{F}_3$

i.

$$\underline{F}_3 = -\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$$
$$|\underline{F}_3| = |-\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}|$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{1 + 4 + 4}$$
$$= 3$$

ii

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = 4\underline{i} - 4\underline{j}$$

$$\left|\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3\right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{32}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

iii.

$$\underline{2F}_1 - \underline{3F}_2 - \underline{5F}_3 = 5\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$$

$$\left|\underline{2F}_1 - \underline{3F}_2 - \underline{5F}_3\right| = \sqrt{(5)}^2 \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{30}$$

உ+ம் 2 :

முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகள் A, B, C **ஆகும். ஆவற்றின் தானக் காவிகள்** $\underline{a} = 2\underline{i} + 4\underline{j} - \underline{k}$; $\underline{b} = 4\underline{i} + 5\underline{j} + \underline{k}$, $\underline{c} = 3\underline{i} + 6\underline{j} - 3\underline{k}$ **ஆகும். முக்கோணியின் பக்கங்களின்**
நீளங்களைக் கண்டு முக்கோணியானது செங்கோணத்தை உடையது எனவும் காட்டுக. AB **யின் திசைக் கோசைன்களைக் காண்க.**

$\vec{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

$= 2\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k}$

$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$

$= 3$

$\vec{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$= \underline{i} + \underline{j} - 4\underline{k}$

$\left|\vec{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{18}$

$\vec{CA} = \underline{a} - c$

$= \underline{i} - \underline{2j} + 2\underline{k}$

$\left|\vec{CA}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}$

$= 3$

$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 3^2$

$= 18$

$= BC^2$

பைதசரசின் விதிப்படி கோணம் Aயில் செங்கோணத்தையுடைய செங்கோண முக்கோணி ABC ஆகும்.

AB = 3

$\vec{AB} = 2\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k}$

$2 = 3Cos\alpha,\ 1 = 3Cos\beta,\ 2 = 3Cos\, r$

இங்கு $Cos\alpha, Cos\beta, Cos\, r$ என்பன AB யின் திசைக் கோசைன்களாகும்.

/ திசைக்கோசைன்கள் $= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ஆகும்.

<u>நான்கு புள்ளிகள் ஒரு தளத்தில் இருப்பதற்கு நிபந்தனை</u>

A, B, C, D **என்னும் நான்கு புள்ளிகளின் தானக்காவி** O **குறித்து** $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ **ஆயின் இவை நான்கும் ஒரு தளத்தில் இருத்தற்கு,**

$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + r\underline{c} + \delta\underline{d} = 0$ **ஆகவும்** $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ **ஆகவும் இருத்தல் வேண்டும்.**

AC **யிற்கு சமாந்தரமாக** D **யிற் கூடாக வரையும் நேர்கோடு** AB **ஐ அல்லது நீட்டப்பட்ட** AB **ஐ** B^1 **இல் சந்திக்கின்ற தென்க.**

D யிற் கூடாக AB இற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்ட நேர்கோடு AC ஐ அல்லது நீட்டப்பட்ட AC I C¹ இல் சந்திக்கின்றது என்க.

$$\vec{AB_1} = \lambda \vec{AB}$$
$$\vec{AC_1} = \mu \vec{AC}$$
என எழுதலாம்.

அதாவது
$$\vec{AB_1} = \lambda\left(\underline{b} - \underline{a}\right)$$
$$\vec{AC_1} = \mu\left(\underline{c} - \underline{a}\right)$$

$$\vec{OD} = \vec{OB_1} + \vec{B^1 D}$$
$$= \vec{OA} + \vec{AB^1} + \vec{B^1 D}$$
$$= \vec{OA} + \vec{AB^1} + \vec{AC^1}$$

காவிக் கூட்டல் விதிப்படி / $\underline{d} = \underline{a} + \lambda\left(\underline{b} - \underline{a}\right) + \mu\left(\underline{c} - \underline{a}\right)$

$$\left(1 - \lambda - \mu\right)\underline{a} + \lambda \underline{b} + \mu \underline{c} - \underline{d} = \underline{0}$$

அதாவது $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} + \delta \underline{d} = \underline{0}$

இங்கு $\alpha = 1 - \lambda - \mu, \beta = \lambda, \gamma = \mu, \delta = -1$

/ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$

தேற்றம்

ஒரு தொடைத் துணிக்கைகளின் திணிவுகள் $m_1, m_2, \ldots m_n$ என்பன முறையே $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots \underline{r}_n$ என்னும் புள்ளிகளில் இருப்பின் அவற்றின் திணிவுமையம் $\underline{r}$ ஆனது $m_1, m_2, \ldots m_n$ எண்களுடன் சேர்ந்துள்ள இப்புள்ளிகளின் மையப் போலியாகும்.

அதாவது $\underline{r} = \dfrac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 + m_3 \underline{r}_3 \ldots\ldots + m_n \underline{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots m_n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

நிறுவல் :

$G \qquad m_2 g\, A_2 G \,Cos\theta - m_1 g\, x\, A_1 G\ Cos\theta = 0$

$$m_1 A_1 G = m_2 A_2 G$$

A_1, G, A_2 என்பன ஒரே நேர் கோட்டில் உள்ளன. A_1 இலிருந்து G யின் போக்கு, G யிலிருந்து A_2 வின் போக்கிற்கு ஒத்தது.

$$m_1 \overrightarrow{A_1G} = -m_2 \overrightarrow{A_2G}$$
$$= m_2 \overrightarrow{GA_2}$$
$$m_1(\underline{r} - \underline{r}_1) = m_2(\underline{r}_2 - \underline{r})$$
$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\underline{r} = m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2$$
$$\underline{r} = \frac{m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2}{m_1 + m_2}$$

/ $n = 2$ ஆக முடிவு உண்மையாகும்.

$n = p$ யிற்கு முடிவு உண்மையென்க.

அதாவது A_1, A_2 ….A_p என்னும் புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$, …… $\underline{r}_p$ ஆயும் அதில் வைக்கப்பட்டுள்ள திணிவுகள் m_1, m_2 ….m_p ஆயும் இருப்பின் அவற்றின் திணிவு மையம் G^1 இன் தானக் காவி $\underline{r}^1$ எனின்

$$\underline{r}^1 = \frac{m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2 + m_3\underline{r}_3 + ...m_p\underline{r}_p}{m_1 + m_2 + ...m_p}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1} m_i}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{p} m_i\right)\underline{r}^1 = \sum_{i=1}^{p} m_i \underline{r}_i \qquad (1)$$

n = 2 இற்கு உண்மை.

$$/ \ \underline{r} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{p} m_i\right) + \underline{r}^1 + m_{p+1}\underline{r}_{p+1}}{\sum_{i=1}^{p} m_i + m_{p+1}}$$ ஆகும்.

$$(1) \Rightarrow \underline{r} = \frac{\sum_{i=1}^{p} m_i \underline{r}_i + m_{p+1}\underline{r}_{p+1}}{\sum_{i=1}^{p} m_i + m_{p+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{p} m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^{p+1} m_i}$$

ஆனால் n = 1 இற்கு உண்மையெனில் n = 2 இற்கு உண்மை.

n = p யிற்கு உண்மையெனில் n = p+1 இற்கு உண்மை.

∴ கணிதத் தொகுத்தறி முறையின் படி n இன் KO எண் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் தந்த முடிவு உண்மை.

உ+ம் 1 :

$\underline{i}+\underline{j}, 2\underline{i}-\underline{j}, 2\underline{i}+\underline{j}, 2\underline{i}+3\underline{j}$ **என்னும் புள்ளிகளில் முறையே** 4,3,2,3 **அலகுத□ திணிவுத் துணிக்கைகள் ஓய்வில் உள்ளன. அவற்றின் திணிவு மைய தானக் காவியைக் காண்க.**

திணிவு மைய தானக் காவி $\underline{r}$ **என்க.**

$$\underline{r}=\frac{m_1\underline{r}_1+m_2\underline{r}_2+m_3\underline{r}_3+m_4\underline{r}_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

$$=\frac{4(\underline{i}+\underline{j})+3(2\underline{i}-\underline{j})+2(2\underline{i}+\underline{j})+3(2\underline{i}+3\underline{j})}{4+3+2+3}$$

$$=\frac{20\underline{i}+12\underline{j}}{12}$$

$$=\frac{5}{3}\underline{i}+\underline{j}$$

உ+ம் 2 :

$\overrightarrow{OG}=\sum_{i=1}^{n}m_i\underline{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n}m_i$ **என்ற முடிவு உற்பத்தி** O **வைச் சார்ந்திருக்கவில்லை என நிறுவுக.**

காவிக் கூட்டல் விதிப்படி

$$\overrightarrow{O^1A_i}=\overrightarrow{0^10}+\overrightarrow{OA}_i$$

$$\underline{r}_i=\underline{a}+\underline{r}_i$$

உற்பத்தி O^1 **குறித்து** $A_1, A_2 \ldots A_n$ **புள்ளிகளிலுள்ள** $m_1, m_2 \ldots m_n$ **என்னும் திணிவுகளின் திணிவு மையம்** G^1 **என்க.**

$$\overrightarrow{0^1G^1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\underline{r}^1{}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i(\underline{r}_i+\underline{a})}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

$$0^1\vec{G^1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}^1{}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} + \underline{a}\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$= \vec{OG} + \underline{a}$

$= \vec{OG} + \vec{O^1O}$

$= \vec{O^1G}$ (காவிக்கூட் டல் விதிப் படி)

$/ \ G^1 \equiv G$ ஆகும்

எனவே G ஆனது உற்பத்தியில் தங்கியிருக்கவில்லை.

λ, μ <u>தேற்றம்</u>

ஒரு புள்ளியில் OA, OB, என்னும் திசைகளில் தாக்கமுறும் விசைகள் $\lambda\vec{OA}, \mu\vec{OB}$ என்பவற்றால் குறிக்கப்படின் அவற்றின் விளையுள் ஆனது பருமனிலும் திசையிலும் $(\lambda + \mu)\vec{OC}$ என்பதால் இங்கு C என்பது AB யில் $\frac{AC}{CB} = \frac{\mu}{\lambda}$ ஆகுமாறு ஒரு புள்ளியாகும்.

நிறுவல் : $\frac{AC}{CB} = \frac{\mu}{\lambda} > 0$ **என்க.**

$\lambda AC = \mu CB$

A யிலிருந்து C யின் போக்கு C யிலிருந்து B யின் போக்கை ஒத்தது. A, C, B என்பன ஒரே நேர் கோட்டில் உள்ளன.

$\therefore \lambda\vec{AC} = \mu\vec{CB}$

$\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC}$ **காவிக்கூட் டல் விதி**

$\vec{CB} = \vec{CO} + \vec{OB}$ **காவிக்கூட் டல் விதி**

$$\lambda\left(\vec{AO} + \vec{OC}\right) = \mu\left(\vec{CO} + \vec{OB}\right)$$

$$\lambda\vec{OC} - \mu\vec{CO} = \mu\vec{OB} - \lambda\vec{AO} \Rightarrow (\lambda + \mu)\vec{OC} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}$$

$\frac{\mu}{\lambda} < 0$ **எனில்** $(\lambda < 0)$

$\frac{AC}{CB} = \frac{\mu}{\lambda}$

$\lambda AC = \mu CB$

$\lambda\vec{AC} = \mu\vec{CB}$

/ தேற்றம் உண்மை.

உ+ம் 2 :

ABC என்னும் முக்கோணியின் பக்கங்கள் வழியே $2\vec{BC}, \vec{CA}, \vec{BA}$ என்னும் விசைகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் விளையுள் $6\vec{DE}$ என நிறுவுக.

இங்கு D ஆனது BC யின் நடுப்புள்ளியாகும். E ஆனது CA யில் $CE = \frac{1}{3}CA$ ஆகவுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

λ, μ தேற் றப் படி

$2\vec{BC} + \vec{BA} = 3\vec{BE}$

$\frac{CE}{CA} = \frac{1}{3}$

/ $\vec{CA} = 3\vec{CE}$

$3\vec{CE} + 3\vec{BE} = 6\vec{DE}$

/ $\vec{CA} + 2\vec{BC} + \vec{BA} = 6\vec{DE}$

தரப்பட்ட ஒரு புள்ளி A யினூடாக காவி b யிற்குச் சமாந்தரமாக உள்ள நேர் வரை ஒன்றின் காவிச் சமன்பாடு

காவிக் கூட்டல் விதிப்படி

$\underline{r} = \vec{OA} + \vec{AR}$

$= \underline{a} + t\underline{b}$

இங்கு t என்பது ஓர் எண்ணி. (மாறும் பரமானம்)

தரப்பட்ட புள்ளிகள் A, B இனூடாகச் செல்லும் நேர்வரை ஒன்றின் காவிச் சமன்பாடு

A, B, R என்பன ஒரே நேர்கோட்டிலும் ஒரே போக்கிலும் உள்ளதால். $t\vec{AB} = \vec{AR}$ என எழுதலாம்.

இங்கு t – மாறும் பரமானம்

$t(\underline{b} - \underline{a}) = \underline{r} - \underline{a}$

$\underline{r} = (1-t)\underline{a} + t\underline{b}$

பயிற்சி

1. $\underline{a}$ என்னும் காவியை $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ இல் உணர்த்துக.
2. ஆள்கூறுகளைப் பயன்படுத்த $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ என நிறுவுக.

3. ஒரு உற்பத்தி O குறித்து $\underline{a}, \underline{b}$ என்பவற்றை தானக்காவிகளாகக் கொண்ட புள்ளிகள் A, B ஆகும். AB யின் நடுப்புள்ளி C யின் தானக் காவியை O வினை குறித்து காண்க.

4. உற்பத்தி O தொடர்பாக P, Q என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}$ எனக் கொள்க. PQ ஐ வெளியாக m, n என்ற விகிதத்தில் R பிரித்தால் O தொடர்பான R இன் தானக் காவியைக் காண்க.

5. $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ எனின் r இற்கும் ox, oy, oz என்னும் செவ்வக ஆள்கூற்று அச்சுத் திசைக்கும் இடையே உள்ள கோணங்களின் கோசைன்களைக் காண்க.

6. $\underline{F}_1 = 2\underline{i} + 3\underline{j} - \underline{k}, \underline{F}_2 = -5\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k}$ என்னும் விசைகள் ஒருங்கமைவாகத் துணிக்கை ஒன்றைத் தாக்குகின்றன. விளையுள் விசையின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

7. காவிகள் இரண்டு சமாந்தரமாயின் உன்றின் கூறுகள் மற்றையதன் கூறுகளுக்கு விகித சமனாயிருக்குமெனக் காட்டுக. இதன் மூலம் அல்லது வேற வழியில் $A(1,-2,-8), B(5,0,-2), C(11,3,7)$ என்னும் மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் இருப்பவை எனக் காட்டுக.

   AC ஐ என்ன விகிதத்தில் B பிரிக்கின்றது என்பதையும் பெறுக.

8. முக்கோணம் ஒன்றின் இடையங்கள் முக்கூறிடும் புள்ளியில் சந்திப்பன என நிறுவுக.

9. முக்கோணம் ABC யின் சுற்று மையம் O ஆகவும் நிமிர்மையம் H ஆகவும் $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}$ இருப்பின் என்பவற்றால் குறிப்பிடப்பட்ட விசைகளின் விளைவுகனானது பருமனிலும் திசையிலும் வினாவ் குறிப்பிடப்படும் எனக் காட்டுக.

அத்தியாயம் - III

உ+ம் :

குற்றுப் பெருக்கம் அல்லது எண்ணிப் பெருக்கம் [Dot product or Scalar product]

$\underline{a}, \underline{b}$ என்பன குறிப்பிட்ட இரு காவிகளாகவும் இருக்க, எண்ணி $abCos\theta$ என்பது

i. $|\underline{a}| = a$ ஆயும்

ii. $|\underline{b}| = b$ ஆயும்

iii. $\underline{a}$ க்கும் $\underline{b}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ ஆகவும் இருப்பின் $\underline{a} \cdot \underline{b} = abCos\theta$ என வரையறுக்கப்படும். இது காவி $\underline{a}, \underline{b}$ என்பனவற்றின் எண்ணிப் பெருக்கம் ஆகும்.

உ+ம் : $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$

$\underline{b} = \overrightarrow{OB}$ ஆகவும்

$\angle AOB = \theta$ ஆகவும் இருப்பின்

$\underline{a} \cdot \underline{b} = OA \times OB$ கோசை $\angle AOB$ என குறிக்கலாம்.

எண்ணிப் பெருக்கத்தின் இயல்புகள்

I. $\underline{a}\cdot\underline{b} = ab$ கோசை θ

$b\cdot\underline{a} = ba$ கோசை θ

ஆனால் ab கோசை $\theta = ba$ கோசை θ

/ $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a}$

எண்ணிப் பெருக்கம் பரிவர்த்தனை இயல்புடையது. இங்கு என்பது $\underline{a}, \underline{b}$ கிடைப்பட்ட கோணம்.

II. $\underline{a}\cdot\underline{a} = aa = a^2$

/ $a = (\underline{a}\cdot\underline{a})^{1/2}$

$|\underline{a}| = (\underline{a}\cdot\underline{a})^{1/2}$

III. $\underline{a} = 0$ அல் லது $\underline{b} = 0$ ஆயின்

$\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$

$\theta = 0^0$

IV. $\underline{a}\cdot\underline{b} = ab$ கோசை 0^0

$= ab$

V. $\theta = 90^0$ எனின்

$\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$

$\theta = \pi$ எனின்

VI. $\underline{a}\cdot\underline{b} = ab$ கோசை π

$= -ab$

VII. m ஒரு நேர் எண்ணி எனில்

$(m\underline{a})\cdot\underline{b} = |m\underline{a}|\times|\underline{b}|$ கோசை θ

$= m|\underline{a}||\underline{b}|$ கோசை θ

$= m(\underline{a}\cdot\underline{b})$

m ஒரு மறை எண்ணி எனில்

$(m\underline{a})\cdot\underline{b} = |m\underline{a}||\underline{b}|$ கோசை $(\pi-\theta)$

$= -mab(-Cos\,\theta)$

$= mab$ கோசை θ

$= m(\underline{a}\cdot\underline{b})$

எனவே இரு சந்தர்ப்பங்களிலும்

$(m\underline{a})\cdot\underline{b} = m(\underline{a}\cdot\underline{b})$

/ $(m\underline{b})\cdot\underline{a} = m(\underline{b}\cdot\underline{a})$ **(நிறுவியது)**

$= m(\underline{a}\cdot\underline{b})$ **(பரிவர் த் தனையானது)**

/ $(m\underline{a})\cdot\underline{b} = m(\underline{b})\cdot\underline{a}$

$= \underline{a}\cdot(m\underline{b})$ **(நிறுவியது)**

VIII. **இரண்டு காவிகளின் எண்ணிப் பெருக்கம் என்பது ஒரு காவியின் மட்டு, இக்காவியில் கோட்டுத்துண்டத்தின் எறியம் ஆகியவற்றின் பெருக்கத்திற்குச் சமனாகும்.**

இரு உருவங்களிலும் $\vec{OA} = \underline{a}, \vec{OB} = \underline{b}$ **என்க.**

/ $\underline{a}\cdot\underline{b} = ab$ **கோசை** θ **என்பதால்**

$\underline{a}\cdot\underline{b} = (OA)(OC)$ (θ **கூர் ங் கோணம் எனின்**)

$\underline{a}\cdot\underline{b} = (OA)(O^1C)$ (θ **விரிகோணம் எனின்**)

எனவே இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் $\underline{a}\cdot\underline{b} = OA \times OA$ **யில்** OB **யின் எறியம்**

IX. $\underline{a}\cdot(\underline{b}\cdot\underline{c}) = \underline{a}\cdot\underline{b} + \underline{a}\cdot\underline{c}$

பின்வரும் உருவில்

$\vec{PQ} = \underline{a}$

$\vec{PR} = b$

$\vec{RS} = \underline{c}$

என்க.

காவிக் கூட்டல் விதிப்படி

$\vec{RS} = \underline{b} + \underline{c}$

PQ **இல்** PR, RS **என்பவற்றின் எறியங்கள் முறையே** PL, LM **என்க. இவ் எறியங்கள் நேர் எனக் கொள்ளப்பட்டன.**

X. $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ **என்ப வலக்கை அச்சுத் தொகுதி ஒன்றின் திசையிலுள்ள அலகுக் காவிகள் எனின்**

$\underline{i}\cdot i = |\underline{i}||\underline{i}|$ **கோசை** 0^0

$= 1$

இவ்வாறே

$\underline{j}\cdot\underline{j} = \underline{k}\cdot\underline{k} = 1$

$\underline{i}\cdot\underline{j} = |\underline{i}||\underline{j}|$ **கோசை** $90^0 = 0$

இவ்வாறே $\underline{j}\cdot\underline{k} = \underline{k}\cdot\underline{i} = 0$

உ+ம் 1 : $\underline{a} = a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k}, \quad \underline{b} = b_x\underline{i} + b_y\underline{j} + b_z\underline{k}$ **எனின்** $\underline{a}\cdot\underline{b}$ **ஐக் காண்க.**

$\underline{a}\cdot\underline{b} = (a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k})\cdot(b_x\underline{i} + b_y\underline{j} + b_z\underline{k})$

$= a_xb_x\,\underline{i}\cdot\underline{i} + a_yb_y\,\underline{j}\cdot j + a_zb_z\underline{k}\cdot k + a_xb_y\underline{i}\cdot\underline{j} + a_xb_z\underline{i}\cdot\underline{k} + a_yb_x\underline{j}\cdot\underline{i} + a_yb_z\underline{j}\cdot\underline{k} + a_zb_x\underline{k}\cdot\underline{j}$

$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

$\underline{b} = \underline{a}$ ஆக

$\underline{a} \cdot \underline{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$

/ $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$

உ+ம் 2 :

$\underline{a} = 2\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k},\ \underline{b} = 2\underline{i} - 3\underline{j} + 7\underline{k}$ **என்பவற்றுக்கிடையில் உள்ள கோணத்தைக் காண்க.**

$\underline{a}, \underline{b}$ **என்பவற்றுக்கிடையில் உள்ள கோணம்** α **என்க.**

/ $(\underline{a} \cdot \underline{b}) = |\underline{a}||\underline{b}|$ **கோசை** α (வ + ம்)

/ **கோசை** $\alpha = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}$

$$= \frac{(2\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}) \cdot (2\underline{i} - 3\underline{j} + 7\underline{k})}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}\ \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (7)^2}}$$

$$= \frac{4 - 9 + 7}{\sqrt{14}\sqrt{16}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{217}}$$

/ $\alpha =$ **கோசை** $^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{217}}\right)$

உ+ம் 3 :

x **மாறியாக உள்ள காவிச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.**

$\underline{x} + (\underline{x} \cdot \underline{b})\underline{a} = \underline{c}$ (1) **இங்கு** $1 + \underline{a} \cdot \underline{b} \neq 0$ **என்னும் வகையில்** $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ **என்பன தரப்பட்ட காவிகளாகும்.**

$(1) \cdot \underline{b} \Rightarrow [\underline{x} + (\underline{x} \cdot \underline{b})\underline{a}] \cdot \underline{b} = \underline{c} \cdot \underline{b}$

அதாவது $\underline{x} \cdot \underline{b} + (\underline{x} \cdot \underline{b})(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \underline{c} \cdot \underline{b}$

/ $\underline{x} \cdot \underline{b} = \dfrac{\underline{c} \cdot \underline{b}}{1 + \underline{a} \cdot \underline{b}}$ / $1 + \underline{a} \cdot \underline{b} \neq 0$

1 இல் பிரதியிட நாம் பெறுவது

$$\underline{x} + \left(\frac{\underline{c} \cdot \underline{b}}{1 + \underline{a} \cdot \underline{b}}\right)\underline{a} = \underline{c}$$

/ $\underline{x} = \underline{c} - \left(\dfrac{\underline{c} \cdot \underline{b}}{1 + \underline{a} \cdot \underline{b}}\right)\underline{a}$

பயிற்சி – 3

1. $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k},\ \underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}$ **என்னும் காவிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில்** $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ **எனக் காட்டுக.**

2. எண்ணிப் பெருக்க வரைவிலக்கணத்தை உபயோகித்து கோசை $A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ என்ற கோசைன் விதியை பெறுக.

3. நிறுவுக.

 i. $(\underline{a}+\underline{b})\cdot\underline{c}=\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{b}+\underline{c}$

 ii. $(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{c}+\underline{d})=\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a}\cdot\underline{d}+\underline{b}\cdot\underline{c}+\underline{b}\cdot\underline{d}$

 iii. $(\underline{a}+\underline{b})\cdot(a+\underline{b})=\underline{a}^2+(\underline{a}\cdot\underline{b})+\underline{\underline{b}}^2$

 iv. $(\underline{a}+\underline{b})\cdot\underline{c}=\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{b}+\underline{c}$

4. முக்கோணியின் குத்துயரங்கள் புள்ளியொன்றில் சந்திக்கின்றன என காவிகளைப் பயன்படுத்திக் காட்டுக.

5. OABC என்னும் நான்முகியில் OA + BC, OC + AB எனின் $OB\perp AC$ என நிறுவுக.

6. $\underline{F}_i=a(\underline{i}+\underline{j}+\underline{k}),\underline{F}_2=3\underline{a}(\underline{i}-\underline{j}),\underline{F}_3=a(2\underline{i}+3\underline{j}+4-\underline{k})$ என்னும் மூன்று விசைகள் துணிக்கை P ஐ ஒருங்கமைவாகத் தாக்குகின்றன. A என்பது ஒருமை. புள்ளி(1,0,1) இலிருந்து புள்ளி (2,4,0) இற்கு P நேர் கோடு வழியே இயங்கினால் விசைகளால் செய்யப்பட்ட முழு வேலையையும் காண்க.

அத்தியாயம் - IV

உ+ம்

இரண்டு காவிகளின் காவிப் பெருக்கம் அல்லது குறுக்குப் பெருக்கம்

$\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் இரண்டு காவிகள் காவிப் பெருக்கம், காவி a,b சைன் $\theta\,\underline{\hat{n}}$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது. இங்கு $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்பவற்றின் திசைகளுக்கிடையில் உள்ள கோணம் θ

$\underline{\hat{n}}$ இன் திசையின் போக்கு பின்வருமாறு தெரியப்படும். ஏந்தப் போக்கில் சுழற்றினால் $\underline{a}$ ஆனது கோணம் θ ஊடாக $\underline{b}$ உள் செல்லுமோ, அதே முறையில; $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்பவற்றின் தானத்திற்குச் செங்குத்தான ஒரு வலம்புரி ஆணியை சுழற்ற அது $\underline{\hat{n}}$ இன் திசையில் இயங்கும்.

இப்பெருக்கம் பெரும்பாலும் குறுக்குப் பெருக்கம் எனப்படும்.

அதாவது $\underline{a}\wedge\underline{b}=ab$ சைன் $\theta\,\underline{\hat{n}}$

காவிப்பெருக்கத்தின் இயல்புகள்

1. $\underline{a}\wedge\underline{b}=ab$ சைன் $\theta\,\underline{\hat{n}}$

 $b\wedge\underline{a}=ba$ சைன் $\theta(-\underline{\hat{n}})$

 $=-ab$ சைன் $\theta\,\underline{\hat{n}}$

 / $\underline{a}\wedge\underline{b}=-\underline{b}\wedge\underline{a}$

/ காவிப் பெருக்கம் பரிவர்த்தனை இயல்பு அற்றது.

2.

i. $\underline{a} = \underline{0}$ ஆயின் $\underline{a} \wedge \underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}|$ சைன் $\theta \hat{n}$

ii. $b = \underline{0}$ ஆயின் $\underline{a} \wedge \underline{b} = |\underline{a}|\,|o|$ சைன் $\theta \hat{n}$

iii. $\theta = \underline{0}^{0}$ ஆயின் $\underline{a} \wedge \underline{b} = |\underline{a}|\,|b|$ சைன் $\theta \hat{n}$

iv. $\theta = \underline{n}$ ஆயின் $\underline{a} \wedge \underline{b} = |\underline{a}|\,|b|$ சைன் $\pi \hat{n} \;\; = \underline{o}$

இரண்டு சமாந்தரக் காவிகளிக் காவிப்பெருக்கம் பூச்சிய காவியாகும்.

3. $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்பன அலகுக்காவிகளின் வலக்கைத் தொகுதியாக அமைந்தால்

i. $\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k} = -(\underline{j} \wedge \underline{i})$

ii. $j \wedge \underline{k} = \underline{i} = -(\underline{k} \wedge j)$

iii. $\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j} = -(\underline{i} \wedge \underline{k})$

iv. $\underline{i} \wedge \underline{i} = \underline{j} \wedge \underline{j} = \underline{k} \wedge \underline{k} = \underline{o}$

4. $\underline{a} \wedge (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \wedge \underline{b} + \underline{a} \wedge c$ காவிப்பெருக்கம் பரம்பலுடையது

நிறுவல் :

$\vec{OA} = \underline{a}, \vec{OB} = \underline{b}, \vec{OC} = c$ என்க.

இணைகரம் OBDC ஐ வரைந்து பூரணமாக்குக.

$\underline{a}$ இற்கு செங்குத்தான தளம் π இல் OBDC யின் நிமிர் கோண எறியம் $OB^1D^1C^1$ ஆகும். எனவே $OB^1D^1C^1$ என்பதும் இணைகரமாகும். $\vec{OB}^1, \vec{OD}^1, \vec{OC}^1$ என்பன தளம் π இல் முறையே $\underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$ என்பவற்றின் எறியங்களாகும்.

$\underline{a}, \underline{b}$ கிடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்

$\underline{a} \wedge \underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}|$ சைன் $\theta \hat{\underline{n}}$

$|\underline{a} \wedge \underline{b}| = a\,b$ சைன் θ

$= |\underline{a}^1|\,(OB^1) = (OA)(OB^1)$

$|\underline{a} \wedge \underline{b}^1| = |\underline{a}|\,|\underline{b}^1|$ சைன் 90^0

$= (OA)(OB^1)$

/ $|\underline{a} \wedge \underline{b}| = \underline{a} \wedge \underline{b}^1$

$\underline{a} \wedge \underline{b}, \underline{a} \wedge \underline{b}^1$

என்பன ஒரே போக்குடையதால்

$\underline{a} \wedge \underline{b} = \underline{a} \wedge \underline{b}$ (1)

இவ்வாறே $\underline{a} \wedge (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \wedge \underline{(\underline{b} + \underline{c})^1}$

$\underline{a} \wedge \underline{b} = \underline{a} \wedge c^1$ இங்கு $\underline{b}^1 = \overrightarrow{\underline{OB}}^1, \underline{c}^1 = \overrightarrow{\underline{OC}}^1, (\underline{b}+\underline{c})^1 = \overrightarrow{OD}^1$ ஒரு தளக் காவிகளான $\underline{b}^1, (\underline{b}+\underline{c})^1, \underline{c}^1$ என்பவற்றை $\underline{a}$ ஆல் முன்காவிப் பெருக்கம் செய்வதால் பெறுவது அவை ஒவ்வொன்றையும் தளம் π யில் 90^0 ஊடாக ஒரே போக்கில் சுழற்றுவதாகும்.

$OB^{//}, OD^{//}, OC^{//}$ என்பன முறையே $\underline{a} \wedge \underline{b}^1, \underline{a} \wedge (\underline{b}+\underline{c})^1, \underline{a} \wedge \underline{c}^1$ என்பவற்றைக் குறிக்குமாயின் என்பதும் இணைகரமாகும்.

இப்பொழுது $\overrightarrow{OD}^{//} = \overrightarrow{OB}^{//} + \overrightarrow{OC}^{//}$ காவிக் கூட் டல் விதி

அதாவது $\underline{a} \wedge (\underline{b}+\underline{c})^1 = \underline{a} \wedge \underline{b}^1 + \underline{a} \wedge \underline{c}^1 \qquad (2)$

$(1)\ (2) \Rightarrow \underline{a} \wedge \underline{(\underline{b}+\underline{c})} = \underline{a} \wedge \underline{b} + \underline{a} \wedge \underline{c}$

5.

$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k},\ \underline{b} = b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k}$ எனின்

$$\begin{aligned}
\underline{a} \wedge \underline{b} &= (a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}) \wedge (b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k}) \\
&= a_x \underline{i} \wedge (b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k}) + a_y \underline{j} \wedge (b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k}) + a_z \underline{k} \wedge (b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k}) \\
&= a_x b_y \underline{k} + a_x b_z (-\underline{j}) + a_y b_x (-\underline{k}) + a_y b_z \underline{i} + a_z b_x \underline{j} + a_z b_y (-\underline{i}) \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\underline{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\underline{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\underline{k} \\
&= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

உ+ம் 1:

$(\underline{a}+\underline{b}) \wedge \underline{c} = \underline{a} \wedge \underline{c} + \underline{b} \wedge \underline{c}$ எனக் காட்டுக.

$\underline{a} \wedge \underline{b} = -\underline{b} \wedge \underline{a}$ நிறுவப்பட்டது

$/\ (\underline{a}+\underline{b}) \wedge \underline{c} = -\underline{c} \wedge (\underline{a} \wedge \underline{b})$

பண்பு IV இலிருந்து $\underline{c} \wedge (\underline{a}+\underline{b}) = \underline{c} \wedge \underline{a} + \underline{c} \wedge \underline{b}$

$/\ (\underline{a}+\underline{b}) \wedge \underline{c} = -[\underline{c} \wedge \underline{a} + \underline{c} \wedge \underline{b}]$

$= \underline{a \wedge \underline{c}} + \underline{b} \wedge \underline{c}$

காவிப்பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்துதல்

1. காவிப்பரப்பளவு

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$ என்க.

$|\underline{a} \wedge \underline{b}| = |\underline{a}|\,|\underline{b}|$ சைன் $A\hat{O}B$

$= OA \times OB$ சைன் $A\hat{O}B$

$OA \times h$ (OA யிலிருந் து B யின் செங் குத் துத் தூரம் h)

=இ ணைகரம் $OACB$ யின் பரப் பளவு

$\underline{a} \wedge \underline{b}$ யின் திசை இ ணைகரத் தின் தளத் திற் குரிய செவ் வன் வழியே உ ள் ளது.

$\underline{a} \wedge \underline{b}$ என்னும் காவிப்பெருக்கம் இணைகரம் OACB யின் காவிப் பரப்பளவைக் குறிக்கிறது.

ஒரு புள்ளி பற்றி ஓரிடப்படுத்திய காவியின் திருப்பம்

E எனபது கோடு ℓ நெடுக ஓரிடப்படுத்திய காவி எனக் கொள்க. ℓ இல் P யாதுமொரு புள்ளி எனின் O பற்றி $\underline{F}$ இன் காவித்திருப்பமென $\overrightarrow{OP} \wedge \underline{F}$ வரையறுப்பர்.

O தொடர்பான P யின் தானக்காவி $\underline{r}$ எனில், மேலே கூறிய திருப்பம்

கோடு ℓ இல் தானக்காவி $\underline{r}^1$ உடன் விளங்கும் வேறோர் புள்ளி Q எனில் O வைப் பற்றிய Q வின் திருப்பம்

$$\underline{r}^1 \wedge \underline{F}$$
$$= \left(\underline{r} + \overrightarrow{PQ}\right) \wedge \underline{F}$$
$$= \underline{r} \wedge \underline{F} + \overrightarrow{PQ} \wedge \underline{F}$$
$$= \underline{r} \wedge \underline{F} + \underline{O} \qquad (/\ PQ \,//\, \underline{F}$$

/ O பற்றிய திருப்பம், புள்ளி P ஐக் குறிக்கும் இடத்தில் தங்கியிருக்கவில்லை.

பயிற்சி -4

1. m யாதுதொரு எண்ணி ஆயின் $(m\underline{a}) \wedge \underline{b} = \underline{a} \wedge (m\underline{b}) = m(\underline{a} \wedge \underline{b})$ எனக் காட்டுக.
2. $\underline{a}, \underline{b}$ என்பவற்றுக்கிடையிலான கோணங்களில் ஒன்று சைன் $^{-1}\dfrac{|\underline{a} \wedge \underline{b}|}{|\underline{a}||\underline{b}|}$ எனக் காட்டுக.
3. காட்டுக.
   i. $(\underline{a} + \underline{b}) \wedge (\underline{c} \wedge \underline{d}) = \underline{a} \wedge \underline{c} + \underline{a} \wedge \underline{d} + b \wedge \underline{c} + \underline{b} \wedge \underline{d}$
   ii. $(3\underline{i} + 4\underline{j}) \wedge (5\underline{i} + 7\underline{j}) = \underline{k}$
4. அலகுக்காவி $\underline{e}$ யின் திசையில் A ஊடாகச் செல்லும் நேர் கோட்டின் காவிச் சமன்பாட்டைப் பெறுக.
5. முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகள் A, B, C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{i}, \underline{i} + \underline{j} - \underline{k}, -\underline{k}$ எனின் பின்வருவனவற்றைப் பெறுக.
   i. சைன் A சைன், B சைன் C யின் பெறுமானங்கள்
   ii. முக்கோணியின் தளத்துக்குச் செவ்வனான அலகுக்காவி
   iii. முக்கோணியின் பரப்பளவு
6. ஒரு முக்கோணியின் சைன் சூத்திரத்தைப் பெறுக.

அத்தியாயம் - V

காவிகளின் மும்மைப் பெருக்கம்

உ+ம்

எண்ணி மும்மைப் பெருக்கம்

வலக்கைத் தொகுதி

$\underline{a}$ என்பது $\underline{b} \wedge \underline{c}$ என்பதுடன் ஒரு கூர்ங்கோணத்தை அமைப்பின் $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ என்பது இவ்வொழுங்கில் ஒரு வலக்கைத் தொகுதியாக அமையும் என வரையறுக்கப்படும். இது $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்பது இவ்வொழுங்கில் ஒரு வலக்கைத் தொகுதியை அமைக்கும்.

இடக்கைத் தொகுதி

$\underline{a}$ என்பது $\underline{b} \wedge \underline{c}$ என்பதுடன் ஒரு கூர்ங்கோணத்தை அமைப்பின் $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ என்பது இவ்வொழுங்கில் ஒரு இடக்கைத் தொகுதியாக அமையும் என வரையறுக்கப்படும்.

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ என்பன யாதும் மூன்று காவிகளாயின் $\underline{a}$ என்பதன் $\underline{b} \wedge \underline{c}$ யுடனான எண்ணிப் பெருக்கம் $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ என்பதன் எண்ணி மும்மைப் பெருக்கம் எனப்படும். இதனை $\underline{a} \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c})$ என எழுதுவோம்.

இதனை $\underline{a} \cdot \underline{b} \wedge \underline{c}$ என எழுதினால போதுமானது.

$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}, b = b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k}, c = c_x \underline{i} + c_y \underline{j} + c_z \underline{k}$ என் க

$$\underline{b} \wedge \underline{c} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$ நிறுவப்பட்டது.

$$= \underline{i}\begin{vmatrix} by & bz \\ cy & cz \end{vmatrix} - \underline{j}\begin{vmatrix} bx & bz \\ cx & cz \end{vmatrix} + \underline{k}\begin{vmatrix} bx & by \\ cx & cy \end{vmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \wedge \underline{c} = a_x\begin{vmatrix} by & bz \\ cy & cz \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} bx & bz \\ cx & cz \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} bx & by \\ cx & cy \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{vmatrix}$$

ஒரு துணிகோவையில் இரு நிரைகள் இடைம ாற்றப்படின் துணிக்கோவையின் குறி மாற்றமடைவதால் அவ்வாறான நிரைகளின் இரு இடை மாற்றங்கள் துணி கோவையின் குறியை மாற்றமடையச் செய்யாது.

எனவே

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \wedge \underline{c} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} bx & by & bz \\ ax & ay & az \\ cx & cy & cz \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} bx & by & bz \\ cx & cy & cz \\ ax & ay & az \end{vmatrix}$$

$/ \ \underline{a} \cdot \underline{b} \wedge \underline{c} = b \cdot \underline{c} \wedge a = c \cdot a \wedge b = \left[\underline{a\ b\ c}\right]$ என குறிக்கப்படும்.

அதாவது காவிகளின் ஒவ்வொரு வட்ட வரிசை மாற்றமும் பெருக்கலின் ஒரே பெறுமானத்தைத் தரும்.

வட்ட ஒழுங்கு மாற்றப்படும் போது பெருக்கலின் குறியும் மாறும்.

அதாவது $\underline{a}\cdot\underline{b}\wedge\underline{c}=-\underline{a}\cdot\underline{c}\wedge\underline{b}$

$[\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}]=-[\underline{a}\ c\ \underline{b}]$

கன அளவான மும்மை எண்ணிப் பெருக்கம்

ஒரு இணைகரப் பரவையின் சந்திக்கின்ற விளிம்புகளான OA, OB, OC என்பன $\vec{OA}=\underline{a},\vec{OB}=\underline{b},\vec{OC}=\underline{c}$ ஆகும் எனக் கொள்க.

$\underline{b}\wedge\underline{c}=(OBDC$ யின் பரப் பு$)\hat{\underline{n}}$

$=\Delta\hat{\underline{n}}$

இங்கு $\hat{\underline{n}}$ எனபது முகம் OBDC க்குச் செங்குத்தான அலகுக் காவியாவதுடன் $\hat{\underline{n}},\underline{b},\underline{c}$ ஒரு வலக்கைத் தொகுதியாகவும் அமையும்.

$\hat{\underline{n}},a$ ஆகியவற்றுக்கிடையிலுள்ள கோணம் θ ஆயின் $\underline{a}\cdot\underline{b}\wedge\underline{c}=\underline{a}\cdot\Delta\hat{\underline{n}}=\Delta\underline{a}\cdot\hat{\underline{n}}=\Delta OH$

= V = இணைகரப் பரவையின் கனவளவு

a, b, c ஒரே தளக்காவிகளாயின் மேலே V பூச்சியமாகும்.

அதாவது [a, b, c] = O ஆகும்.

ஆகவே [a, b, c] என்பது மறைதல், காவிகள் ஒரே தளமாவதற்குத் தேவையான நிபந்தனையாகும்.

உ+ம்

$A(2,0,1),B(-1,2,3),C(3,2,2),D(3,-6,-3)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே தளத்திலுள்ளன என நிறுவுக.

$\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD},$ என்பன ஒரே தளக்காவிகளாயின் நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே தளத்தில் அமையும்.

$\vec{AB}=(-1,2,3)-(2,0,1)=-3\underline{i}+2\underline{j}+2\underline{k}$

$\vec{AC}=\underline{i}+2\underline{j}+\underline{k}$

$\vec{AD}=\underline{i}-6\underline{j}-4\underline{k}$ ஆகும்

எனவே

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}=\begin{vmatrix}-3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -6 & 4\end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix}2 & 1\\ -6 & -4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -6\end{vmatrix}$$

$$=6+10-16=0$$

எனவே $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ என்பன ஒரே தளமானவை. இக்காவிகளுக்கு A என்னும் பொதுப் புள்ளி இருப்பதால் A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே தளத்தில் அமைவனவாகும்.

நிகர்மாற்றுக் காவித்தொடை

உ+ம்

காவித்தொடை $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ என்பது பின்வரும் சமன்பாடுகளினால் வரையறுக்கப்படின்

$$\underline{b}_1 = \frac{\underline{a}_2 \wedge \underline{a}_3}{\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \wedge \underline{a}_3},\ \underline{b}_2 = \frac{\underline{a}_3 \wedge \underline{a}1}{\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \wedge \underline{a}_3},\ \underline{b}_3 = \frac{\underline{a}_1 \wedge \underline{a}_2}{\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \wedge \underline{a}_3}$$

காவித் தொடை $\underline{a}_1, \underline{a}_2 \underline{a}_3$ என்பது மேலே தரப்பட்ட காவித் தொடைக்கு நிகர் மாறானது என வரையறுக்கப்படும்.

உ+ம்

$\underline{b}_1 \cdot \underline{a}_1 = \underline{b}_2 \cdot \underline{a}_2 = \underline{b}_3 \cdot \underline{a}_3$ எனக் காட்டுக.

$$\underline{b}_1 \cdot \underline{a}_1 = \left(\frac{\underline{a}_2 \wedge \underline{b}_2}{\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \wedge \underline{a}_3} \right) \cdot \underline{a}_1 = \frac{\underline{a}_2 \wedge \underline{a}_3 \cdot \underline{a}_1}{\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \wedge \underline{a}_3} = 1$$ ஆகும்.

இவ்வாறே ஏனைய முடிவுகள் $\underline{b}_2 \cdot \underline{a}_2 = \underline{b}_3 \cdot \underline{a}_3 = 1$ என நிறுவலாம்.

பயிற்சி - 5

1. $\underline{a} = \underline{i} - \underline{j}, \underline{b} = \underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$, $\underline{c} = \underline{i} + 3\underline{j}$ எனத் தரப்படின் $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ என்பது வலக்கை அல்லது இடக்கைத் தொகுதி ஒன்றையா அமைக்கும் என்பதைத் துணிக.
2. நிறுவுக.
   i. $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{d}) \wedge (\underline{c} + \underline{e}) = [\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}] + [\underline{a}\ \underline{b}\ e] + [\underline{a}\ d\ \underline{c}] + [\underline{a}\ \underline{d}\ \underline{e}]$

   $\underline{a} = a_1 \underline{\ell} + a_2 \underline{m} + \underline{a}_3 \underline{n}$

   ii. $\underline{b} = b_1 \underline{\ell} + b_2 \underline{m} + \underline{b}_3 \underline{n}$

   $\underline{c} = c_1 \underline{\ell} + c_2 \underline{m} + c_3 \underline{n}$

   எனின் $[\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} [\underline{\ell}\ \underline{m}\ \underline{n}]$ எனக் காட்டுக.

   iii. $\underline{R} = \ell \underline{a} + m\underline{b} + n\underline{c}, \underline{G} = \underline{c} \wedge m\underline{b} + (\underline{a} - \underline{b}) \wedge n\underline{c}$ எனின் $\underline{R} \cdot \underline{G} = -(mn + n\ell + \ell m) [\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}]$

3. காவி $\underline{b} = x\underline{i} + 3\underline{j} + 2\underline{k}$ என்பது காவிகள் $\underline{a} = 2\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}, \underline{b} = 2\underline{i} + 3\underline{j} + 4\underline{k}$ ஆகியவற்றுடன் ஒரே தளமாக அமைந்தால் கூறு x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. $A = (3,7,-2), B(1,5,-1), \overrightarrow{AC} = \underline{i} + 2\underline{j}, \overrightarrow{BD} = -\underline{i} + \underline{k}$ ஆயின் கோடுகள் $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ என்பன இடைவெட்டும் எனக் காட்டுக.

5. $\underline{r} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{b} + \nu\underline{c}$ ஆயின் $\lambda = \underline{r}\cdot a^1,\ \mu = \underline{r}\cdot b^1,\ \nu = \underline{r}\cdot c^1$ எனக் காட்டுக.

இங்கு தொடை $\underline{a}^1, \underline{b}_1, \underline{c}^1$ என்பது ஒரு தளமற்ற தொடை $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ க்கு நிகர் மாற்றானதாகும்

அத்தியாயம் - VI

மும்மைக் காவிப் பெருக்கம் [Vector triple product]

உ+ம்

$(\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c}$ என்பது $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ என்னும் காவிகள் மும்மைக் காவிப் பெருக்கம் என வரையறுக்கப்படும்.

$(\underline{b} \wedge \underline{c}) \wedge \underline{a}, \underline{b} \wedge (\underline{c} \wedge \underline{a})$ என்பனவும் $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ யின் மும்மைக் காவிப் பெருக்கங்களாகும்.

$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{c}$ எனக் காட்டப்படலாம்.

இதற்கு $\underline{a} = a_x\underline{i},\ \underline{b} = b_x\underline{i} + b_y\underline{j} + \underline{c} = c_x\underline{i} + c_y\underline{j} + c_z\underline{k}$ என்க.

$$/ \quad \underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = a_x\underline{i} \wedge \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ b_x & by & o \\ c_x & cy & cz \end{vmatrix} \text{ ஆகும்}$$

$$= a_x\underline{i} \wedge \left(\underline{i}(b_y c_z) - \underline{\underline{j}(b_x c_z) + \underline{k}(b_x c_y - c_x b_y)}\right)$$

$$= -a_x b_x \left(z\underline{h} - a_x b_x c_y \underline{j} + a_x c_x b_y \underline{j}\right)$$

$$= a_x c_x b_x \underline{i} + a_x c_x b_y \underline{j} - a_x b_x c_x \underline{i} - a_x b_x c_z \underline{k} - a_x b_x c_y \underline{j}$$

$$= a_x c_x \left(b_x\underline{i} + b_y\underline{j}\right) - a_x b_x \left(c_x\underline{i} + c_y\underline{j} + c_z\underline{k}\right) +$$

$$= a_x c_x \underline{b} - a_x b_x \underline{c}$$

$$= (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\ \underline{c} \qquad / \ \underline{a}\cdot\underline{c} = a_x c_x$$

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = a_x b_x$$

உ+ம் 1

$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) + \underline{b} \wedge (\underline{c} \wedge \underline{a}) + \underline{c} \wedge (\underline{a} \wedge \underline{b}) = \underline{O}$ என நிறுவுக.

இடக்கைப் பக்கம்

$= (\underline{a}\cdot\underline{c})\ \underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\ \underline{c} + (\underline{b}\cdot\underline{a})\underline{c} - (\underline{b}\cdot\underline{c})\ \underline{a} + (\underline{c}\cdot\underline{b})\underline{a} - (\underline{c}\cdot\underline{a})\underline{b}$ உ+ம் படி

எண்ணிப்பெருக்கம் பரிவர்த்தனையுடையதால்

இடக்கைப் பரிவர்த்தனை $= \underline{O}$

உ+ம் 2

$\underline{x} \wedge \underline{a} + (\underline{x} \cdot \underline{b})\underline{a} = \underline{c}$ (1) என்னும் காவிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$\underline{a} \wedge (1) \Rightarrow \underline{a} \wedge [(\underline{x} \wedge \underline{a})] + \underline{a} \wedge [(\underline{x} \cdot \underline{b})\underline{a}] = \underline{a} \wedge \underline{c}$

$\underline{a} \wedge (\underline{x} \wedge \underline{a}) = \underline{a} \wedge \underline{c}$

அதாவது $\underline{a}^2 \underline{x} - (\underline{a} \cdot \underline{x})\underline{a} = \underline{a} \wedge \underline{c}$

$\underline{a}^2 \underline{x} = \underline{a} \wedge \underline{c} + (\underline{a} \cdot \underline{x})\underline{a}$

$$\underline{x} = \frac{\underline{a} \wedge \underline{c}}{\underline{a}^2} + \lambda \underline{a} \qquad (2)$$

இங்கு $\lambda = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{x}}{\underline{a}^2}$ என்ற எண் 'ணி

2 ஐ 1 இல் பிரதியிட நாம் பெறுவது

$$\left[\frac{\underline{a} \wedge \underline{c}}{\underline{a}^2} + \lambda \underline{a}\right] \wedge \underline{a} + (\underline{x} \cdot \underline{b})\underline{a} = \underline{c}$$

$$\underline{c} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{c}}{\underline{a}^2}\ \underline{a} + \frac{(\underline{a} \wedge \underline{c}) \cdot \underline{b}}{\underline{a}^2}\ \underline{a} + \lambda(\underline{a} \cdot \underline{b})\ \underline{a} = \underline{c}$$

இதன் தீர்வுகள்

(i) $\underline{a} = \underline{O}$ என்ற திரணமான தீர்வு

(ii) $(\underline{a} \cdot \underline{b})\lambda = \dfrac{\underline{a} \cdot (\underline{c} - \underline{c} \wedge \underline{b})}{\underline{a}^2}$ க

1. $\underline{a} \cdot \underline{b} \neq 0$ எனில் தரப்பட்ட சமன்பாடு λ இன் ஒரு தனியான பெறுமானத்தைத் துணியும்.

   அத்துடன் $\underline{x} = \dfrac{1}{\underline{a}^2}\left[\underline{a} \wedge \underline{c} + \dfrac{\underline{a} \cdot (\underline{c} - \underline{c} \wedge \underline{b})}{\underline{a} \cdot \underline{b}}\underline{a}\right]$ ஆகும்.

2. $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ ஆயின் λ எதேச்சையானது

   எனவே $\underline{a} \cdot (\underline{c} - \underline{c} \wedge \underline{b}) \neq 0$ எனில் தீர்வு இல்லை.

   ஆகும். இங்கு λ எதேச்சையானது.

பயிற்சி - 6

1. $(\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{c})\underline{a}$ எனக் காட்டுக.
2. $(\underline{a} \wedge \underline{b})(\underline{c} \wedge \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{a}) - (\underline{b} \cdot \underline{c})(\underline{a} \cdot \underline{d})$ எனக் காட்டுக.
3. $(\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge (c \cdot \underline{d})$ என்பதை விரிக்க
4. $\underline{x}, \underline{y}$ யிற்கான காவி ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க. $\underline{a}, \underline{b}$ இங்கு என்பன தம்முள் நிமிர்கோணக் காவிகளாகும்.
5. $\underline{x} \wedge \underline{a} = \underline{b}$ என்னும் காவிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க. $(\underline{a} \cdot \underline{b}) = 0$

6. ΔABC இல் A, B, C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a},\underline{\ell},\underline{c}$ ஆகும். மையப்போலியின் தானக்காவி யாது?

7. ABCD ஓர் இணைகரமாகும். A, B, C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a},\underline{\ell},\underline{c}$ ஆகும். D யின் தானக்காவியைக் காண்க.

8. ΔABC இல் AB யின் நடுப்புள்ளி D. AC இன் நடுப்புள்ளி E. எனக் காட்டுக. $DE=\frac{1}{2}BC\;\; DE\,//\,BC$ எனக் காட்டுக.

9. ABCD ஒரு நாற்பக்கல். AB, BC, CD, DA என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் P, Q, R, S ஆகும். PQRS ஒரு இணைகரம் என நிறுவுக.

10. நாற்பக்கல் ஒன்றின் எதிர்ப்பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகளும் மூலைவிட்டங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

11. A, B என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a},\ \underline{\ell}$ ஆகும். நீட்டப்பட்ட AB யில் C எனும் புள்ளி AC = 4CB ஆகவும் நீட்டப்பட்ட BA யில் D என்னும் புள்ளி BD = 3BA ஆகுமாறும் அமைந்துள்ளன. C,D என்பவற்றின் தானக்காவிகளைக் காண்க.

12. OABCDE ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $\vec{OA}=\underline{a}, AB=\underline{\ell}$ எனின் O வைக் குறித்து B, C, D, E என்பவற்றின் தானக்காவிகளைக் காண்க.

13. ΔABC இன் இடையங்கள் AD, BE, CF ஆகும். $\vec{AD},\vec{BE},\vec{CF}$ என்பன பக்கங்களாகக் கொண்ட Δ வரையப்படலாம் எனக் காட்டுக.

14. A, B, C என்பவற்றின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a},\underline{\ell},\underline{c}$ ஆகும். எல்லாம் பூச்சியமல்லாத α,β,r என்னும் எண்ணிகள் $\alpha+\beta+r=0,\ \alpha\underline{a}+\beta\underline{\ell}+r\underline{c}=0$ என இருப்பின் மட்டுமே ஒரு நேர் கோட்டில் உள்ளன என நிறுவுக.

15. $\underline{a},\underline{\ell}$ என்பன பூச்சியமற்ற சமாந்தரமற்ற காவிகளாகவும் α,β என்பன எண்ணிகளாகவும் இருக்க $\alpha\underline{a}+\beta\underline{\ell}=0$ என இருப்பின் $\alpha=\beta=0$ என நிறுவுக.

16. இணைகரம் ஒன்றின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருகூறிடும் என நிறுவுக.

17. OACB ஓர் இணைகரம். D, AC இன் நடுப்புள்ளி. மூலைவிட்டம் AB இனதும் OD இனதும் வெட்டுப்புள்ளி E. $\vec{OA}=\underline{a},\vec{OB}=\underline{\ell}$ எனின் $\vec{OD}$ ஐ $\underline{a},\underline{\ell}$ இல் எழுதி $AE=\frac{1}{3}AB$ என நிறுவுக.

18. ΔABC இன் பக்கங்கள் CA, AB என்பவற்றை உட்புறமாக E, F என்பவற்றிலும் நீட்டப்பட்ட BC I D யிலும் ஒரு நேர்கோடு வெட்டுகிறது.

$\frac{BD}{CD}=p,\frac{CE}{EA}=q,\frac{AF}{FB}=r$ எனின்

$\vec{EF}=\frac{1}{1+q}\ \vec{CA}+\frac{r}{1+r}\ \vec{AB}$ எனவும்

$\vec{DF}=\frac{p}{p-1}\ \vec{CA}+\frac{pr+1}{(p-1)(r+1)}\ \vec{AB}$ எனவும் நிறுவி

$pqr-1$ உய்த்தறிக.

19. மூன்று புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் $p\underline{x}, q\underline{y}, r\underline{x}+s\underline{y}$ ஆகும். இங்கு $\underline{x}, \underline{y}$ என்பன சமாந்தரமற்ற காவிகளும் p,q,r,s என்பன எண்ணிகளும் ஆகும். அம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டிலிருந்தால் $ps+qr=pq$ எனக் காட்டுக.

20. A, B, C, D எனும் நான்கு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் $\underline{a}, \underline{\ell}, 4\underline{a}, 3\underline{\ell}$ ஆகும். இங்கு $\underline{a}, \underline{\ell}$ சமாந்தரமற்ற காவிகளாகும். AB, CD என்பவை வெட்டும் புள்ளியின் தானக்காவி எனின் $m\underline{a}+n\underline{\ell}$ என்பவற்றைக் காண்க.

மேலும் AD, BC என்பவற்றின் வெட்டுப்புள்ளியின் தானக்காவி $m^1\underline{a}+n\underline{\ell}$ எனின் $mn^1+m^1n=0$ என நிறுவுக.

21. ΔABC இல் A, B, C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் $\underline{a}, \underline{\ell}, \underline{c}$ ஆகும். BD = 2DC ஆகுமாறு D, BC இல் ஒரு புள்ளி. AM = MD ஆகுமாறு M, AD இல் ஒரு புள்ளி. $CN=\frac{3}{2}cm$ ஆகுமாறு நீட்டப்பட்ட CM இல் N ஒரு புள்ளி N இன் தானக் காவியைக் கண்டு இது AB இல் இருக்குமெனக் காட்டுக.

22. $\underline{r}=\underline{a}+t\,\underline{\ell}, \underline{r}=(2\underline{a}+\underline{\ell})+s(\underline{a}-\underline{\ell})$ என்பன ஒரு தளத்தில் உள்ள இரு நேர் கோடுகளின் காவிச்சமன்பாடுகளானும். இக்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியின் தானக் காவியைக் காண்க.

23. ஒரே தளத்தில் உள்ள மூன்று புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{r}=(3a)+\underline{\ell}+t\underline{a},\ \underline{r}=(\underline{a}+4\underline{\ell})+s(a)-3\underline{\ell}$ $\quad \underline{r}=(-\underline{a}+4\underline{\ell})+u(3\underline{\ell}-2\underline{a})$ கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் தானக் காவிகளைக் காண்க.

24. A, B, C எனும் புள்ளிகள் தானக் காவிகள் முறையே $2\underline{a}+\underline{\ell}, \underline{a}+3\underline{\ell}, 4\underline{a}-3\underline{\ell}$ ஆகும். நேர்கோடு AB இன் காவிச் சமன்பாட்டை எழுதி A, B, C என்பன ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ளது என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

25. $\underline{a}, \underline{\ell}, \underline{c}$ என்பன ஒரு தளத்தில் இல்லாத காவிகளாக இருக்க α, β, r எனும் எண்ணிகள் $\alpha\underline{a}+\beta\underline{\ell}+r\underline{e}=Q$ எனின் $\alpha=\beta=r=0$ என நிறுவுக.

26. O, A, B, C என்பன ஒரு தளத்தில் இல்லாத நான்கு புள்ளிகள். $\vec{OA}=\underline{a}, \vec{OB}=\underline{\ell}, \vec{OC}=\underline{c}$

i. புள்ளி D இன் தானக்காவி $\vec{OD}=\lambda\underline{a}+\mu\underline{\ell}+(1-\lambda-\mu)\underline{c}$ என இருப்பின் A, B, C, D ஒரு தளமானவை எனக் காட்டுக.

ii. தளம் ABC இல் உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியையும் $\alpha\underline{a}+\beta\underline{\ell}+(1-\alpha-\beta)\underline{c}$ என எழுத முடியம் எனக் காட்டுக.